Algoritma Branch & Bound

(Bagian 4)

Bahan Kuliah IF2211 Strategi Algoritma

Oleh: Rinaldi Munir

Update: Masayu Leylia Khoddra

Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika ITB

2021

Assignment Problem

- Misalkan terdapat *n* orang dan *n* buah pekerjaan (*job*). Setiap orang akan di-*assign* dengan sebuah *job*. Ongkos (*cost*) untuk meng-*assign* setiap orang dengan sebuah *job* dinyatakan dengan sebuah matriks.
- Bagaimana meng-*assign* job dengan orang sehingga total ongkos *assignment* seminimal mungkin?
- Contoh: *n* = 4

$$C = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} Job\,1 & Job\,2 & Job\,3 & Job\,4 \\ 9 & 2 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 3 & 7 \\ 5 & 8 & 1 & 8 \\ 7 & 6 & 9 & 4 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{Orang } a \\ \text{Orang } b \\ \text{Orang } c \\ \text{Orang } d \end{array}$$

Assignment Problem: Exhaustive Search

1. Enumerasi n!

$$
C = \begin{array}{cccccc}
 & Job\,1 & Job\,2 & Job\,3 & Job\,4 & \\
 & \left[\begin{matrix} 9 \\ 6 \\ 5 \\ 7 \end{matrix}\right. & \begin{matrix} 2 \\ 4 \\ 8 \\ 6 \end{matrix} & \begin{matrix} 7 \\ 3 \\ 1 \\ 9 \end{matrix} & \left.\begin{matrix} 8 \\ 7 \\ 4 \\ 4 \end{matrix}\right] & \begin{matrix} \text{Orang } a \\ \text{Orang } b \\ \text{Orang } c \\ \text{Orang } d \end{matrix}
\end{array}
$$

2. Evaluasi biaya penugasan

$\langle 1, 2, 3, 4\rangle$ cost = 9 + 4 + 1 + 4 = 18
$\langle 1, 2, 4, 3\rangle$ cost = 9 + 4 + 8 + 9 = 30
$\langle 1, 3, 2, 4\rangle$ cost = 9 + 3 + 8 + 4 = 24
$\langle 1, 3, 4, 2\rangle$ cost = 9 + 3 + 8 + 6 = 26
$\langle 1, 4, 2, 3\rangle$ cost = 9 + 7 + 8 + 9 = 33
$\langle 1, 4, 3, 2\rangle$ cost = 9 + 7 + 1 + 6 = 23

etc.

solutions to the assignment problem as n-tuples $j_1, \ldots, j_n$ in which the ith component, $i = 1, \ldots, n$, indicates the column of the element selected in the ith row (i.e., the job number assigned to the ith person).

3. Pilih penugasan dgn biaya minimum

Assignment Problem: Greedy

Strategi Greedy: assign cost terkecil terlebih dahulu untuk orang yg belum mendapat job. Setiap orang mendapat tepat sebuah *job*.

$$C = \begin{array}{cl} \begin{matrix} Job\,1 & Job\,2 & Job\,3 & Job\,4 \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 9 & \boxed{2} & 7 & 8 \\ \boxed{6} & 4 & 3 & 7 \\ 5 & 8 & \boxed{1} & 4 \\ 7 & 6 & 9 & \boxed{4} \end{bmatrix} & \begin{matrix} \text{Orang } a \\ \text{Orang } b \\ \text{Orang } c \\ \text{Orang } d \end{matrix} \end{array}$$

solutions to the assignment problem as n-tuples $j_1, \dots, j_n$ in which the ith component, $i = 1, \dots, n$, indicates the column of the element selected in the ith row (i.e., the job number assigned to the ith person).

Langkah 1: <0,0,3,0>, total cost=1
Langkah 2: <2,0,3,0>, total cost=2+1=3
Langkah 3: <2,0,3,4>, total cost=2+1+4=7
Langkah 4: <2,1,3,4>, total cost=2+6+1+4=13

Solusi: <2,1,3,4> dengan total cost 13.

Penyelesaian dengan Branch & Bound:

- *Cost* (*lower bound*) setiap simpul hidup di dalam pohon ruang status dapat dihitung dengan berbagai cara, misalnya menggunakan matriks ongkos tereduksi.

- Cara lain yang lebih sederhana untuk menghitung *lower bound* adalah dengan **menjumlahkan nilai minimum pada setiap baris matriks**. Dasar pemikirannya adalah bahwa sembarang solusi, termasuk solusi optimal, total ongkos penugasannya tidak lebih kecil dari jumlah semua nilai terkecil pada setiap baris.

- Untuk sembarang solusi yang *legitimate* (tidak ada job yang sama di-*assign* ke 2 orang atau lebih) jika sebuah job *di-assign* dengan orang, maka ongkos peng-*assign*-an tersebut dihitung sebagai salah satu komponen nilai terkecil di dalam penjumlahan tersebut.

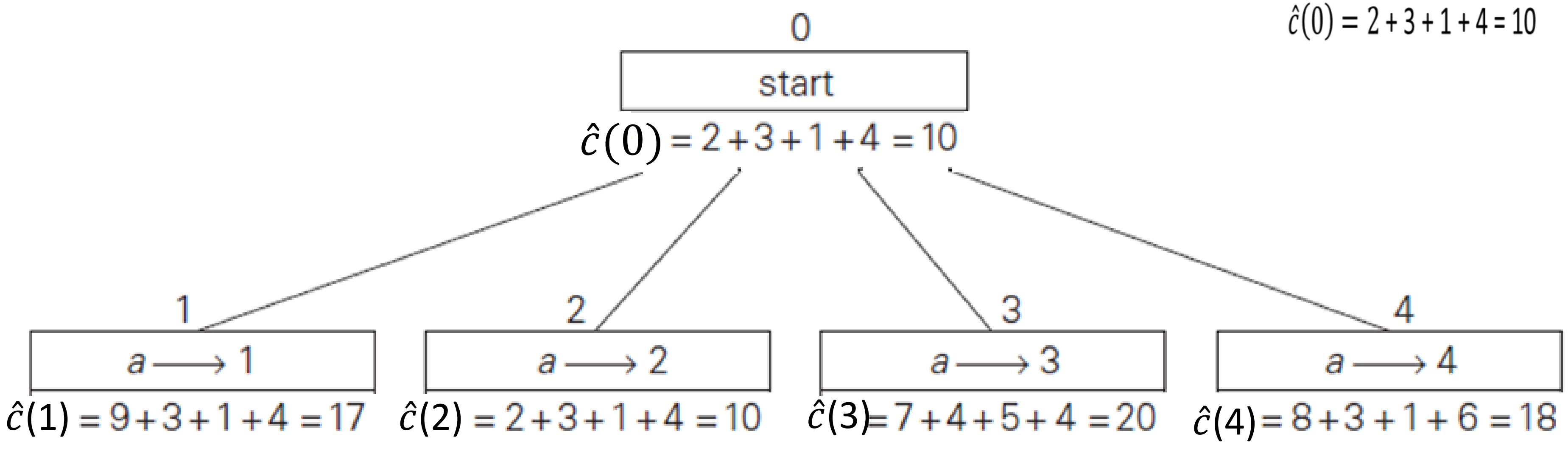
1. *Cost* untuk simpul akar:

   $\hat{c}(0) = 2 + 3 + 1 + 4 = 10$

2. Bangkitkan anak-anak dari simpul akar:

$$C = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{cccc} Job\,1 & Job\,2 & Job\,3 & Job\,4 \end{array}$$
$$C = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 3 & 7 \\ 5 & 8 & 1 & 8 \\ 7 & 6 & 9 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Orang } a \\ \text{Orang } b \\ \text{Orang } c \\ \text{Orang } d \end{array}$$

$\hat{c}(0) = 2 + 3 + 1 + 4 = 10$

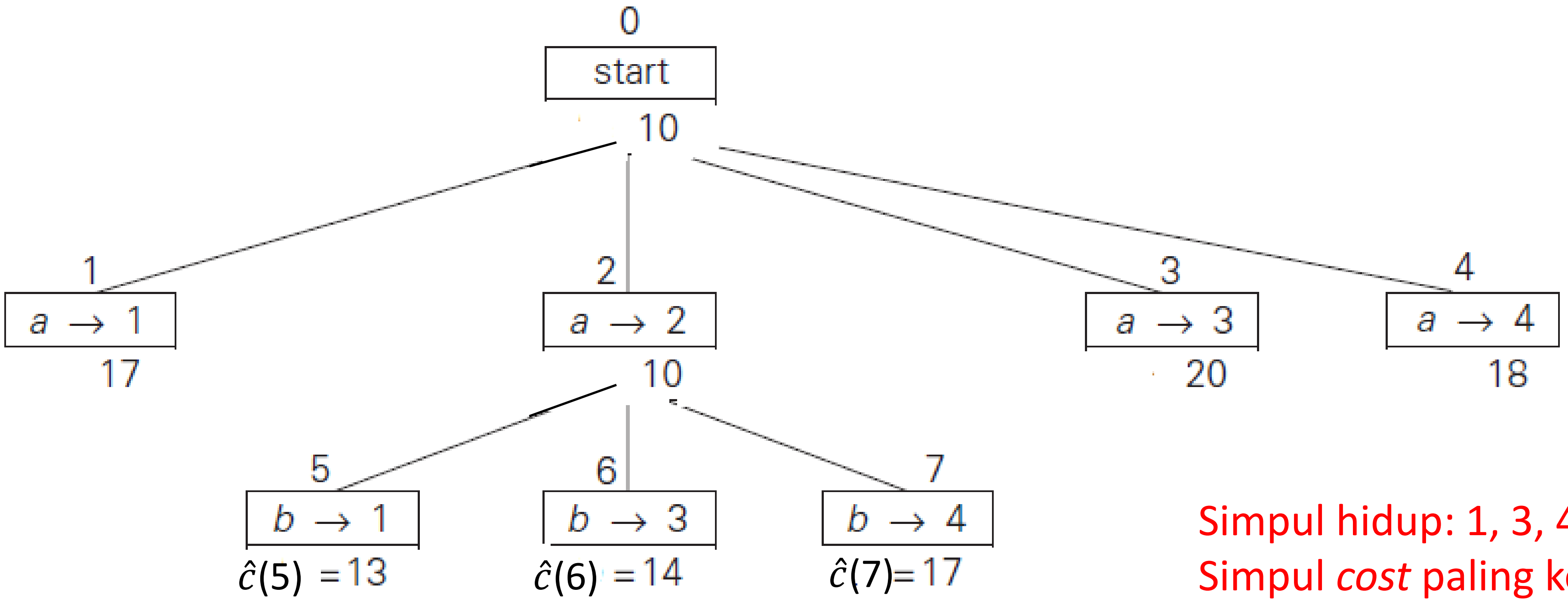


$$\begin{array}{cccc} Job\,1 & Job\,2 & Job\,3 & Job\,4 \end{array}$$
$$C = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 3 & 7 \\ 5 & 8 & 1 & 8 \\ 7 & 6 & 9 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Orang } a \\ \text{Orang } b \\ \text{Orang } c \\ \text{Orang } d \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} Job\,1 & Job\,2 & Job\,3 & Job\,4 \end{array}$$
$$C = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 3 & 7 \\ 5 & 8 & 1 & 8 \\ 7 & 6 & 9 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Orang } a \\ \text{Orang } b \\ \text{Orang } c \\ \text{Orang } d \end{array}$$

Simpul hidup: 1, 2, 3, dan 4
Simpul *cost* paling kecil: 2
Simpul-E sekarang: 2

(Sumber gambar: Levitin, 2003)



Simpul hidup: 1, 3, 4, 5, 6, dan 7

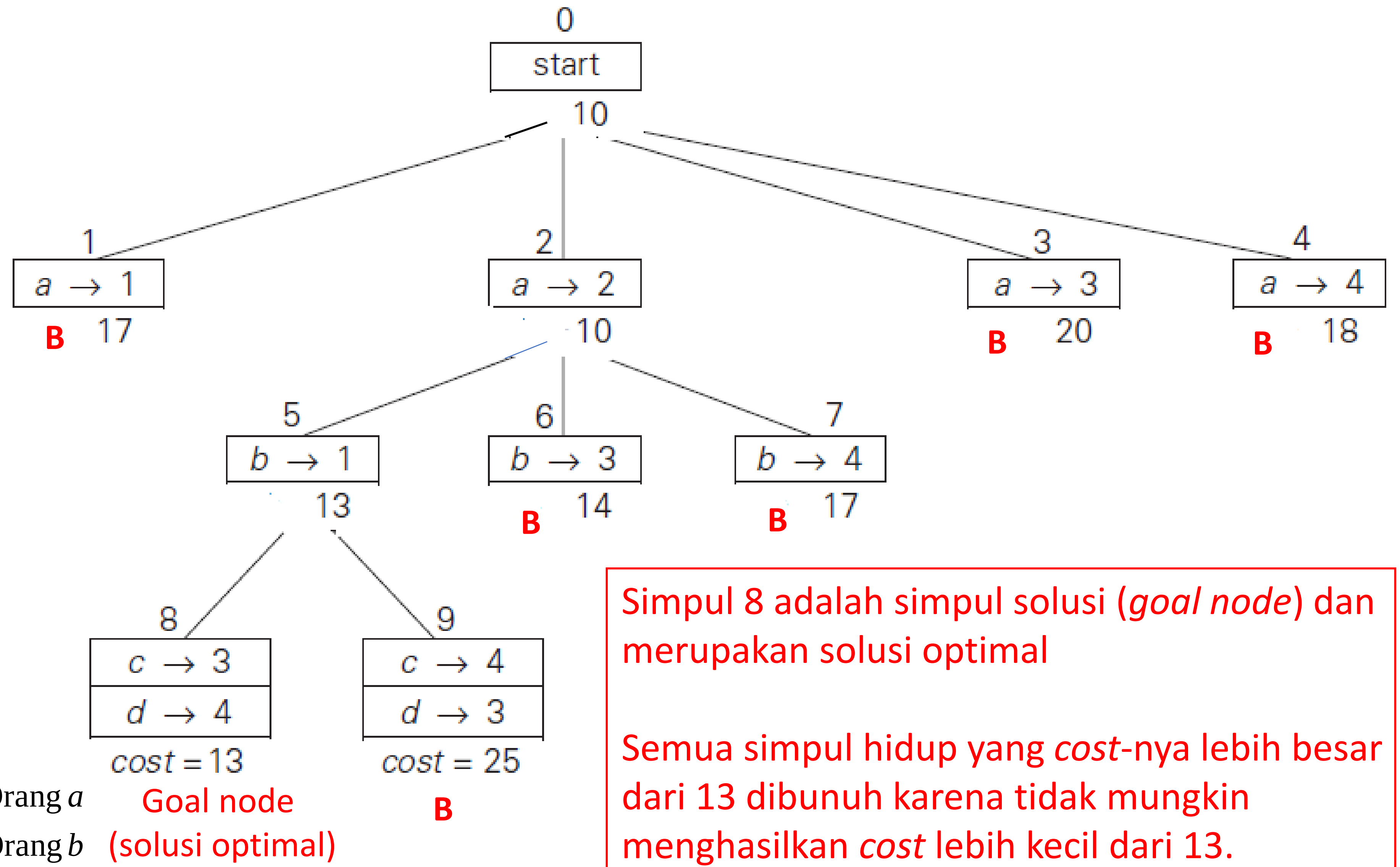
Simpul *cost* paling kecil: 5

Simpul-E sekarang: 5

$$C = \begin{bmatrix} Job\,1 & Job\,2 & Job\,3 & Job\,4 \\ 9 & 2 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 3 & 7 \\ 5 & 8 & 1 & 8 \\ 7 & 6 & 9 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \text{Orang } a \\ \text{Orang } b \\ \text{Orang } c \\ \text{Orang } d \end{array} \qquad C = \begin{bmatrix} Job\,1 & Job\,2 & Job\,3 & Job\,4 \\ 9 & 2 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 3 & 7 \\ 5 & 8 & 1 & 4 \\ 7 & 6 & 9 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \text{Orang } a \\ \text{Orang } b \\ \text{Orang } c \\ \text{Orang } d \end{array}$$

$\hat{c}(5) = 2 + 6 + 1 + 4 = 13$

$\hat{c}(7) = 2 + 7 + 1 + 7 = 17$



$$C = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} Job\,1 & Job\,2 & Job\,3 & Job\,4 \\ 9 & 2 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 3 & 7 \\ 5 & 8 & 1 & 4 \\ 7 & 6 & 9 & 4 \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \text{Orang } a \\ \text{Orang } b \\ \text{Orang } c \\ \text{Orang } d \end{array}$$

$\hat{c}(8)$ = 2 + 6 + 1 + 4 = 13

Simpul 8 adalah simpul solusi (*goal node*) dan merupakan solusi optimal

Semua simpul hidup yang *cost*-nya lebih besar dari 13 dibunuh karena tidak mungkin menghasilkan *cost* lebih kecil dari 13.
(simpul 1, 3, 4, 7. dan 9 dibunuh → **B**)

Solusi optimal: X = (a→2, b→1, c→3, d→4)
Cost = 13

Integer Knapsack Problem

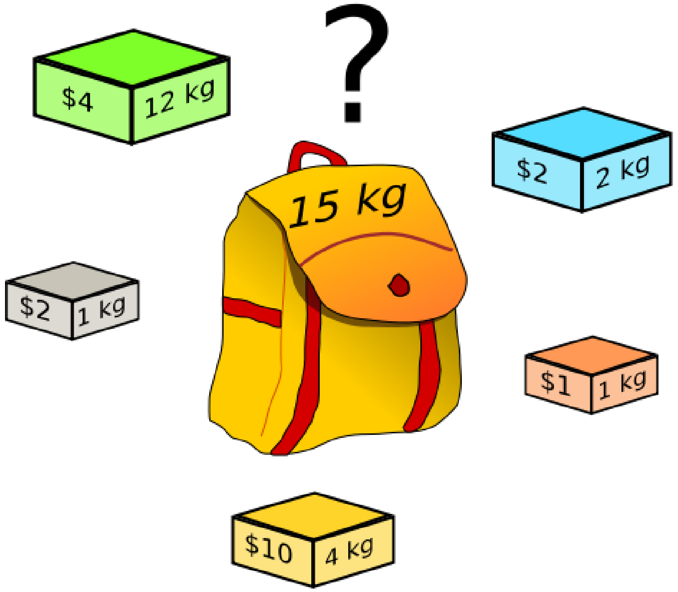
- **Persoalan:** Diberikan *n* buah objek dan sebuah *knapsack* dengan kapasitas bobot *K*. Setiap objek memiliki properti bobot (*weigth*) w_i dan keuntungan(*profit*) p_i. Bagaimana cara memilih objek-objek yang dimasukkan ke dalam *knapsack* sedemikian sehingga diperoleh total keuntungan yang maksimal dengan syarat tidak boleh melebihi kapasitas *knapsack*.
- Formulasi matematis:

Maksimasi $F = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$

dengan kendala (*constraint*)

$$\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq K$$

yang dalam hal ini, $x_i = 0$ atau 1, $i = 1, 2, \ldots, n$



Greedy: 1/0 Knapsack

Greedy by density: Pada setiap langkah, *knapsack* diisi dengan objek yang mempunyai p_i / w_i terbesar. Mencoba **memaksimumkan keuntungan** dengan memilih objek yang mempunyai **keuntungan per unit berat** terbesar.

Contoh: $(w_1,p_1)=(6,12)$; $(w_2,p_2)=(5,15)$; $(w_3,p_3)=(10,50)$; $(w_4,p_4)=(5, 10)$

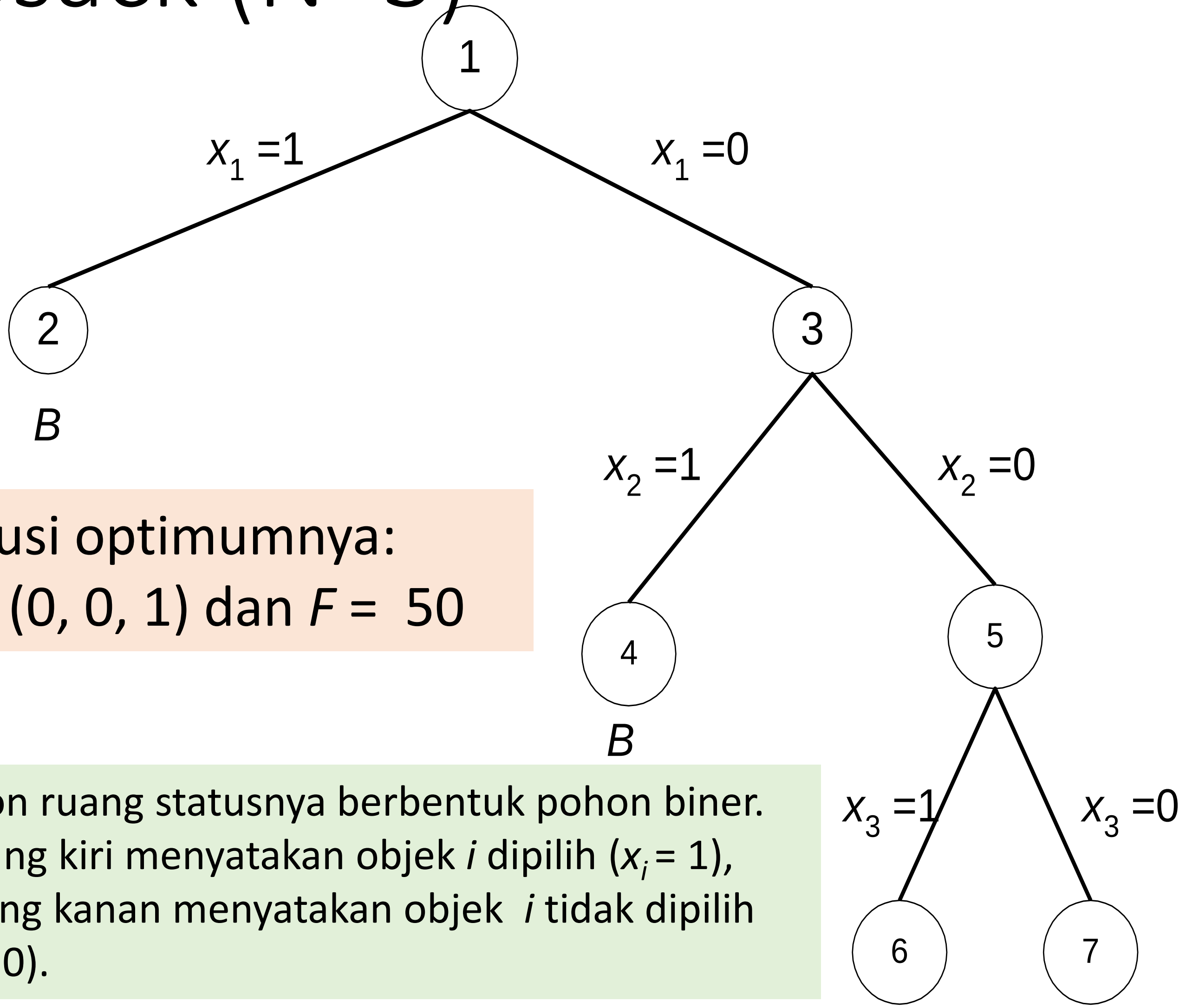
dan sebuah *knapsack* dengan kapasitas K = 16. Solusi optimal: X = (0, 1, 1, 0)

Properti objek				*Greedy by*			Solusi Optimal
i	w_i	p_i	p_i / w_i	*profit*	*weight*	*density*	
1	6	12	2	0	1	0	0
2	5	15	3	1	1	1	1
3	10	50	5	1	0	1	1
4	5	10	2	0	1	0	0
Total bobot				15	16	15	15
Total keuntungan				65	37	65	65

Backtracking: 1/0 Knapsack (N=3)

$X=(x_1,x_2,x_3)$, $x_i \in \{0, 1\}$
$(w_1, w_2, w_3) = (35, 32, 25)$
$(p_1, p_2, p_3) = (40, 25, 50)$
$M = 30$
Constraints: $\sum_{i=1}^{k} w_i x_i \leq M$

RunutBalikR(1)
T([]): x1=1, B=F (bounded)
T([]): x1=0, B=T
T([x1=0]): x2=1, B=F (bounded)
T([x1=0]): x2=0, B=T
T([x1=0,x2=0]): x3=1, B=T, solusi
T([x1=0,x2=0]): x3=0, B=T, solusi



Solusi optimumnya:
$X = (0, 0, 1)$ dan $F = 50$

Pohon ruang statusnya berbentuk pohon biner. Cabang kiri menyatakan objek *i* dipilih ($x_i = 1$), cabang kanan menyatakan objek *i* tidak dipilih ($x_i = 0$).

Pada pohon ruang status, sembarang lintasan dari akar ke daun menyatakan himpunan bagian (*subset*)

Branch & Bound: 1/0 Knapsack

- Persoalan *knapsack* adalah persoalan **maksimasi** (mencari keuntungan maksimum)

- Oleh karena itu, *cost* setiap simpul pada pohon ruang status menyatakan batas atas (*upper bound*) dari solusi optimum. (Bandingkan dengan pendekatan *least cost search* (untuk persoalan minimasi) yang dalam hal ini *cost* setiap simpul menyatakan batas bawah (*lower bound*) dari solusi optimum)

- Pada persoalan maksimasi, simpul berikutnya yang diekspansi adalah **simpul hidup** yang memiliki ***cost* paling besar**.

- Agar pencarian solusi lebih mangkus, maka objek-objek diurutkan berdasarkan p_i/w_i **yang menurun** (dari besar ke kecil) sebagai berikut:

$$p_1/w_1 \geq p_2/w_2 \geq \ldots \geq p_n/w_n$$

- Pohon ruang statusnya berbentuk pohon biner. Cabang kiri menyatakan objek *i* dipilih ($x_i = 1$), cabang kanan menyatakan objek *i* tidak dipilih ($x_i = 0$).

- Tiap simpul pada aras *i* di dalam pohon biner, *i* = 0, 1, 2, ...*n*, menyatakan himpunan bagian (*subset*) dari *n* objek yang dimasukkan ke dalam *knapsack*, yang dipilih dari *i* objek pertama (yang sudah diurut berdasarkan p_i/w_i yang menurun).

- Tiap simpul diisi dengan total bobot *knapsack* yang sudah terpakai (*W*) dan total keuntungan yang sudah dicapai (*F*).

- *Cost* atau batas atas (*upper bound*) simpul *i* dihitung sebagai penjumlahan total keuntungan yang sudah dicapai (*F*) ditambah dengan perkalian sisa kapasitas *knapsack* (*K* – *W*) dengan rasio keuntungan per bobot objek yang tersisa berikutnya (p_{i+1}/w_{i+1}), atau dengan rumus:

$$\hat{c}(i) = F + (K - W)p_{i+1}/w_{i+1}$$

Contoh: Misalkan n = 4, K = 10

(w_1, w_1, w_3, w_4) = (4, 7, 5, 3),

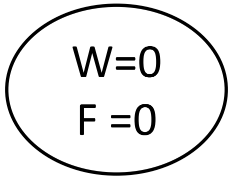
(p_1, p_1, p_3, p_4) = (40, 42, 25, 12),

i	wi	pi	Pi/wi	Greedy by density
1	4	40	10	1
2	7	42	6	0
3	5	25	5	1
4	3	12	4	0

Langkah-Langkah penyelesaian:

1. Hitung $p_i/w_i \rightarrow (p_1/w_1, p_2/w_2, p_3/w_3, p_4/w_4)$ = (10, 6, 5, 4)
2. Urutkan objek-objek berdasarkan p_i/w_i yang menurun $\rightarrow$ kebetulan sudah terurut
3. Bangkitkan simpul akar (simpul 0), W = 0, F = 0,(belum ada objek dipilih) dan

$$\hat{c}(0) = F + (K - W)p_1/w_1 = 0 + (10 - 0)(10) = 100$$



$\hat{c}(0)$ =100

(Sumber: Levitin, 2003)

4. Bangkitkan simpul anak kiri (simpul 2) dan simpul anak kanan (simpul 3) dari simpul akar

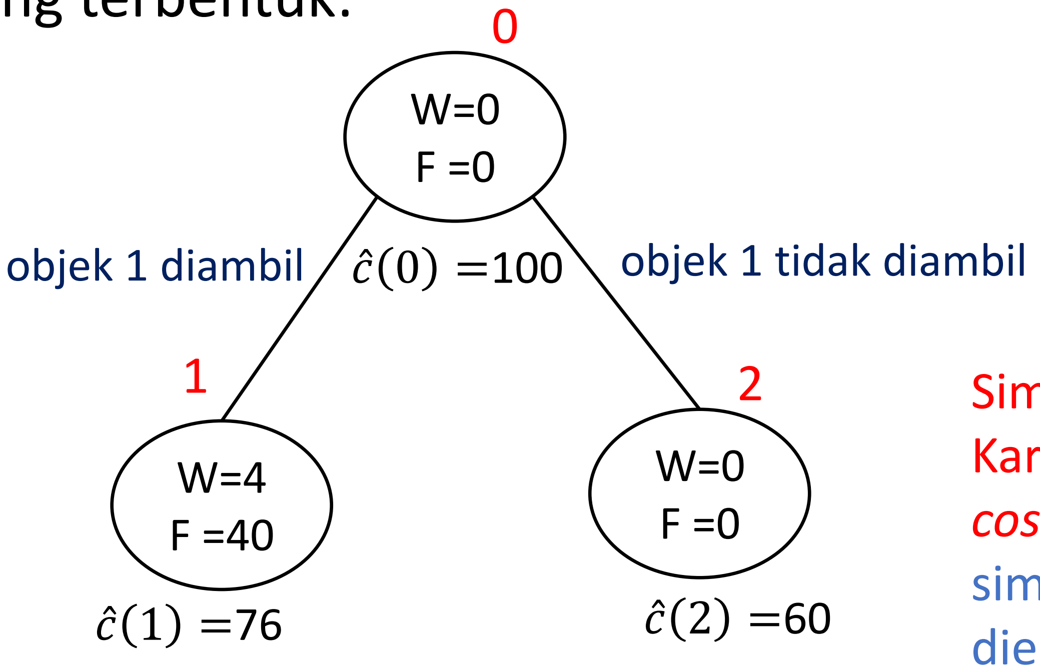
- Simpul 1 (objek 1 diambil): $W = 0 + 4 = 4$; $F = 0 + 40 = 40$

$$\hat{c}(1) = F + (K - W)p_2/w_2 = 40 + (10 - 4)(6) = 76$$

- Simpul 2 (objek 1 tidak diambil): $W = 0 + 0 = 0$; $F = 0 + 0 = 0$

$$\hat{c}(2) = F + (K - W)p_2/w_2 = 0 + (10 - 0)(6) = 60$$

Pohon ruang status yang terbentuk:



Simpul hidup: 1 dan 2
Karena simpul 1 memiliki *cost* paling besar, maka simpul 1 selanjutnya yang diekpansi

5. Bangkitkan anak-anak dari simpul 1, yaitu simpul 3 dan simpul 4

- Simpul 3 (w_2 diambil): $W = 4 + 7 = 11$ > kapasitas knapsack (K = 10)

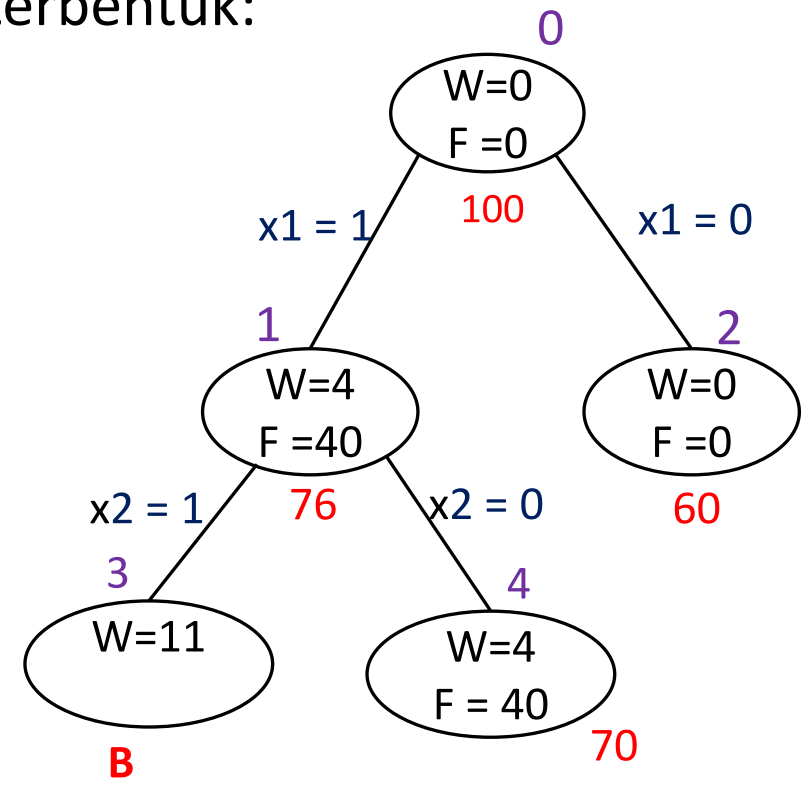
  Simpul 3 langsung dimatikan (**B**).

- Simpul 4 (w_2 tidak diambil): $W = 4 + 0 = 4$; F = 40 + 0 = 40

  $\hat{c}(4) = F + (K - W)p_3/w_3 = 40 + (10 - 4)(5) = 70$

Pohon ruang status yang terbentuk:

Simpul hidup: 2 dan 4
Karena simpul 4 memiliki *cost* paling besar, maka simpul 4 selanjutnya yang diekpansi



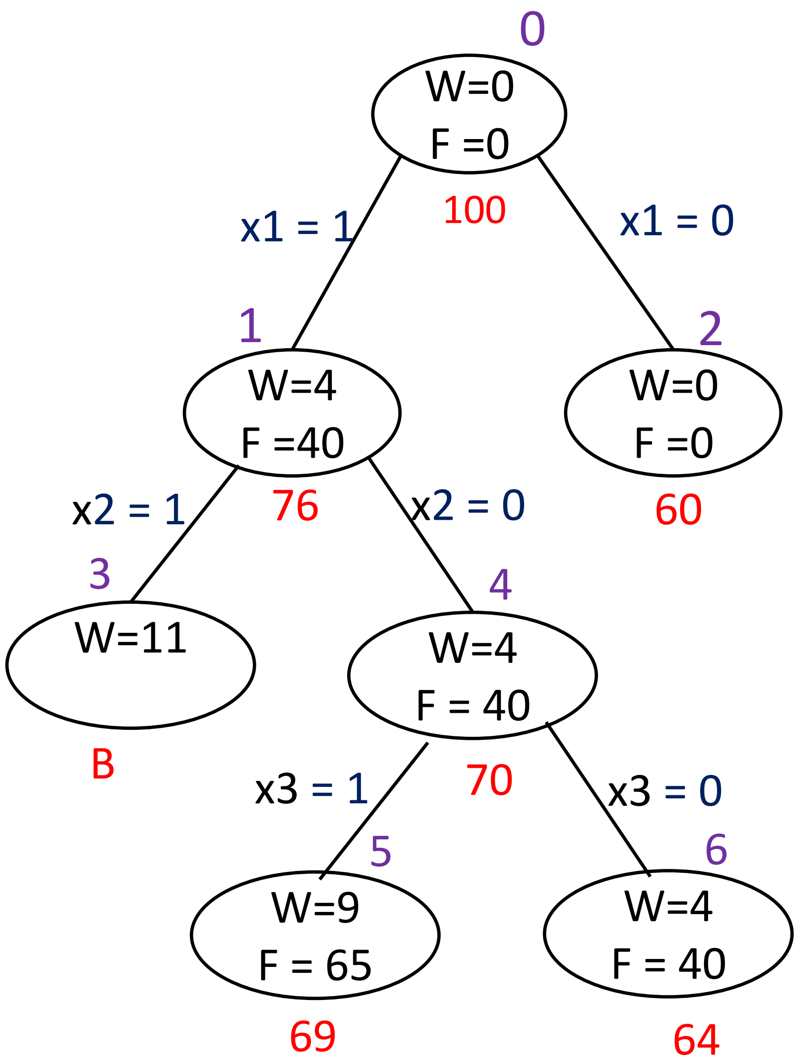
Simpul 5 (objek 3 diambil): $W = 4 + 5 = 9$; $F = 40 + 25 = 65$

$$\hat{c}(5) = F + (K - W)p_4/w_4 = 65 + (10 - 9)(4) = 69$$

Simpul 6 (objek 3 tidak diambil): $W = 4 + 0 = 4$; $F = 40 + 0 = 40$

$$\hat{c}(6) = F + (K - W)p_4/w_4 = 40 + (10 - 4)(4) = 64$$

Simpul hidup: 2, 5, dan 6
Karena simpul 5 memiliki *cost* paling besar, maka simpul 5 selanjutnya yang diekspansi



$(w_1, w_1, w_3, w_4) = (4, 7, 5, 3)$,
$(p_1, p_1, p_3, p_4) = (40, 42, 25, 12)$,
$(p_1/w_1, p_2/w_2, p_3/w_3, p_4/w_4) = (10, 6, 5, 4)$

Simpul 7 (w_4 diambil): W = 9 + 3 = 12 > kapasitas knapsack (K = 10)
Simpul 7 langsung dimatikan.

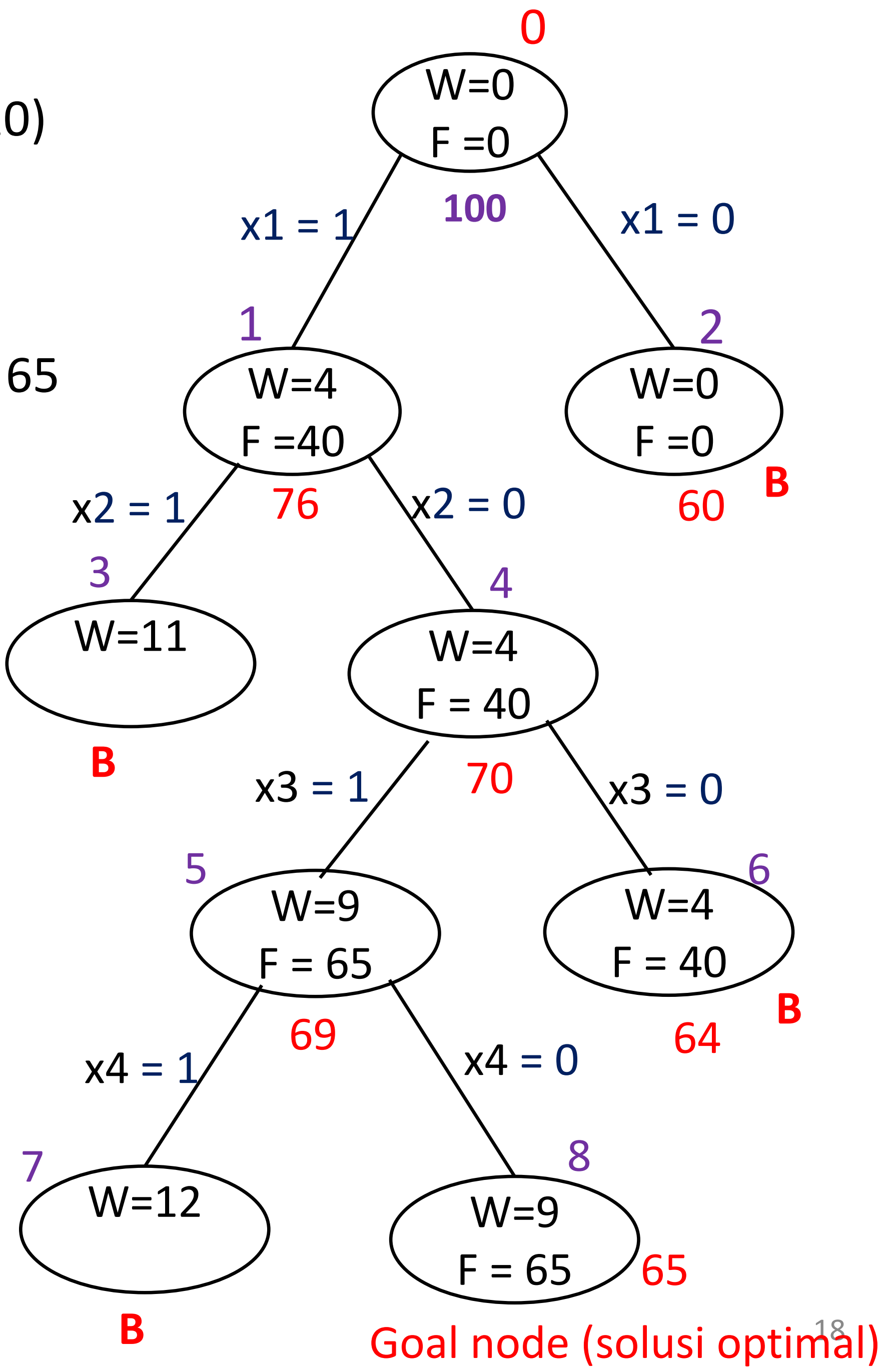
Simpul 8 (w_4 tidak diambil): W = 9 + 0 = 9; F = 65 + 0 = 65

$$\hat{c}(8) = F + (K - W)p_5/w_5 = 65 + (10 - 9)(0) = 65$$

Simpul 8 adalah simpul solusi (*goal node*) dan merupakan solusi optimal

Semua **simpul hidup yang *cost*-nya lebih kecil dari 65** dibunuh
(simpul 2 dan simpul 6 dibunuh)

Solusi optimal: X = (1, 0, 1, 0), F = 65



Contoh 8. Diberikan 6 buah objek sbb:

$(w_1, p_1) = (100, 40)$; $(w_2, p_2) = (50, 35)$; $(w_3, p_3) = (45, 18)$;

$(w_4, p_4) = (20, 4)$; $(w_5, p_5) = (10, 10)$; $(w_6, p_6) = (5, 2)$;

dan sebuah *knapsack* dengan kapasitas K = 100. Solusi dengan algoritma *greedy*:

Properti objek				*Greedy by*			Solusi Optimal
i	w_i	p_i	p_i/w_i	*profit*	*weight*	*density*	
1	100	40	0,4	1	0	0	0
2	50	35	0,7	0	0	1	1
3	45	18	0,4	0	1	0	1
4	20	4	0,2	0	1	1	0
5	10	10	1,0	0	1	1	0
6	5	2	0,4	0	1	1	0 **1**
Total bobot				100	80	85	100
Total keuntungan				40	34	51	55

- Ketiga strategi gagal memberikan solusi optimal!

1. Urutkan objek-objek berdasarkan p_i/w_i yang menurun

i	wi	pi	Pi/wi	Greedy by density
5	10	10	1.0	1 (W=10)
2	50	35	0.7	1 (W=60)
1	100	40	0.4	0
3	45	18	0.4	0
6	5	2	0.4	1 (W=65)
4	20	4	0.2	1 (W=85)
Total profit				51

2. Bangkitkan simpul dgn cost sbb:

$\hat{c}(0) = 0 + (100 - 0)1 = 100$

x5=1: $\hat{c}(1) = 10 + (100 - 10)0.7 = 10 + 63 = 73$

x5=0: $\hat{c}(2) = 0 + (100 - 0)0.7 = 70$

x2=1: $\hat{c}(3) = 45 + (100 - 60)0.4 = 45 + 16 = 61$

x2=0: $\hat{c}(4) = 10 + (100 - 10)0.4 = 10 + 36 = 46$

x2=1: $\hat{c}(5) = 35 + (100 - 50)0.4 = 35 + 20 = 55$

x2=0: $\hat{c}(6) = 0 + (100 - 0)0.4 = 0 + 40 = 40$

x1=0: $\hat{c}(8) = 45 + (100 - 60)0.4 = 45 + 16 = 61$

x3=0: $\hat{c}(10) = 45 + (100 - 60)0.4 = 45 + 16 = 61$

x6=1: $\hat{c}(11) = 47 + (100 - 65)0.2 = 47 + 7 = 54$

x6=0: $\hat{c}(12) = 45 + (100 - 60)0.2 = 45 + 8 = 53$

x1=0: $\hat{c}(14) = 35 + (100 - 50)0.4 = 35 + 20 = 55$

x3=1: $\hat{c}(15) = 53 + (100 - 95)0.4 = 53 + 2 = 55$

x3=0: $\hat{c}(16) = 35 + (100 - 50)0.4 = 35 + 20 = 55$

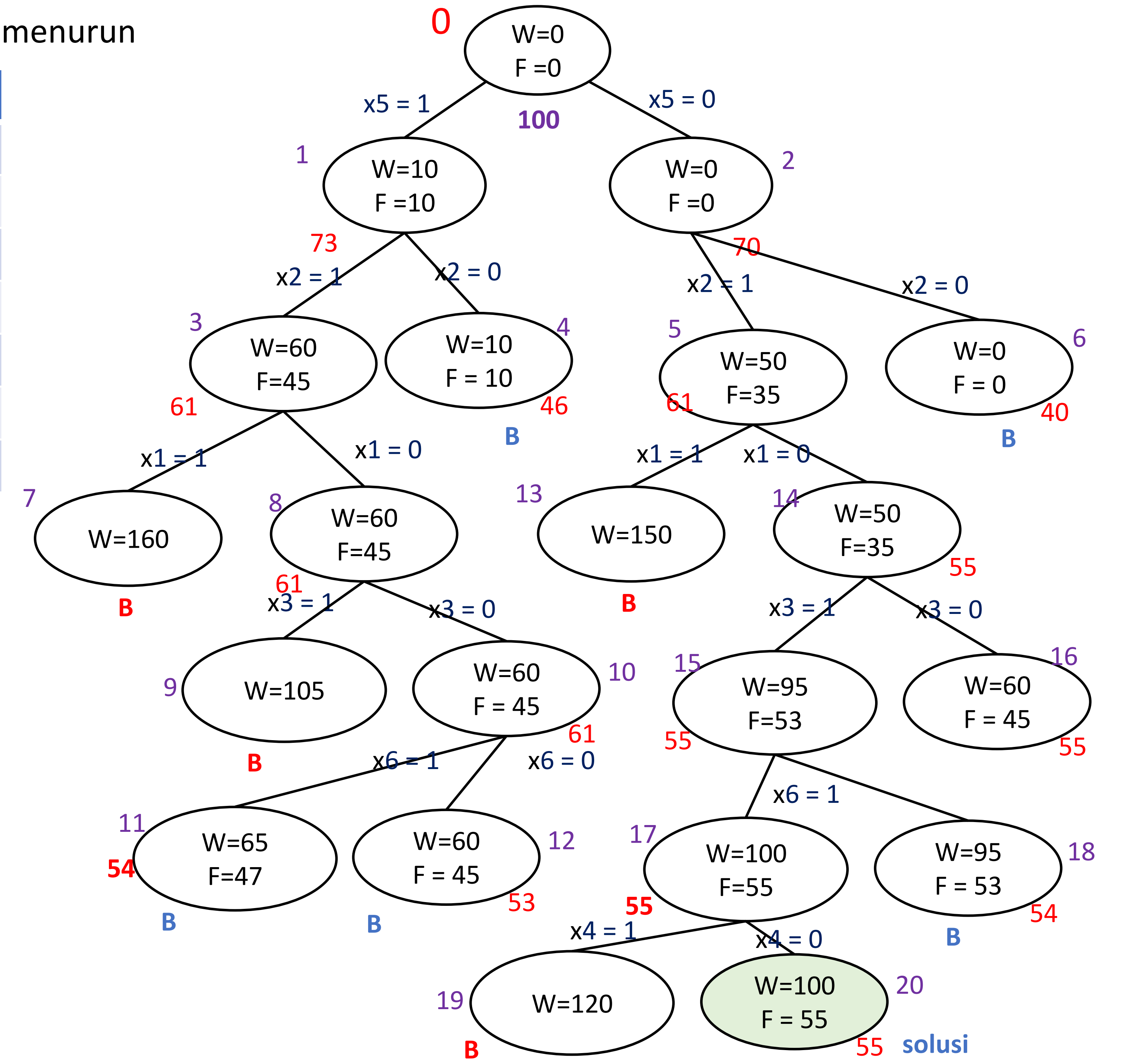
x6=1: $\hat{c}(17) = 55 + (100 - 100)0.2 = 55$

x6=0: $\hat{c}(18) = 53 + (100 - 95)0.2 = 54$

x4=0: $\hat{c}(20) = 55 + (100 - 100)0 = 55$

x6=1: $\hat{c}(21) = 47 + (100 - 65)0.2 = 47 + 7 = 54$

x6=0: $\hat{c}(22) = 45 + (100 - 60)0.2 = 45 + 8 = 53$



TAMAT